

ПРОМЯНА НА ЕТНИЧЕСКАТА СТРУКТУРА НА БЪЛГАРСКОТО НАСЕЛЕНИЕ МЕЖДУ 1900 И 2011 ГОДИНА ПО ДАННИ ОТ НАЦИОНАЛНИТЕ ПРЕБРОЯВАНИЯ НА НАСЕЛЕНИЕТО

Калоян Харалампиев

1. Как се измерва промяната на структури?

1.1. Въведение в проблема

В Гатев, Косева, Спасов (Гатев и др., 1991, с. 319-338) са описани три различни познавателни проблема, свързани с анализа на структури:

- измерване на структурни *изменения*;
- измерване на *различия* между пространствени и други статични структури;
- измерване на *неравномерността* на структурите.

Най-общо, първият познавателен проблем се отнася до измерване на *изменението* на една и съща структура през даден период, т.е. *изменение* в динамика. Вторият познавателен проблем се отнася до сравняването на две равноразмерни структури в един и същи момент, т.е. сравняване в статика. Третият познавателен проблем се отнася до сравняването на една структура с равномерната структура, използвана като еталон, т.е. това е частен случай на втория познавателен проблем, при използване на еталонна структура.

Въпреки разликата между тези три познавателни проблеми, при всеки от тях са предложени измерители единствено за *големината* съответно на *изменението*, *различието* или *неравномерността*, които по същество са варианти на измерителя на структурни *различия*, т.е. подходът от анализа в статика се използва след незначително модифициране и при другите два познавателни проблема.

В Христов (1993), Христов (1999), Христов (2000), Христов (2001), Янкова (2001a) и Янкова (2001b) познавателните проблеми не са изрично разграничени, но отново едни и същи измерители се предлагат за изследване и на структурните *различия*, и на структурните *изменения*.

В Христов (1999) и Янкова (2001б) знакът за равенство между анализа в статика и анализа в динамика е поставен още в заглавията на статиите, като в Янкова (2001б, с. 13) е направено уточнението, че „При изследване на статистическите структури понятията структурни промени, структурни различия, структурни изменения и структурна динамика най-често се използват като равностойни. Поради това би могло да се направи следното уточнение: при статичен анализ да се говори за структурни различия, а при анализ в динамиката – за структурни изменения или промени”. По-нататък се говори за „промяна на структурната динамика” (Янкова 2001б, с. 24-27), но от изложението става ясно, че се има предвид динамиката на измерителите на структурните *различия*, а не динамиката на самата структура.

Също така в Янкова (2001а, с. 25-26) се говори за „промяна в посоката на неравномерност” и „насоченост на структурната динамика”, но от изложението става ясно, че се има предвид факторното влияние на въпросната промяна на *посоката* върху „общото структурно различие”. Тези факторни влияния, но наречени съответно влияние на „промяната на посоката на неравномерността” и влияние на „промяната в степента на неравномерността” са посочени и в Христов (1993, с. 10-12). Тъй или иначе, отново не се измерва *посоката* на промяната, а само ефектите, които тя поражда.

Разгледаните литературни източници показват, че различните автори предлагат към различните познавателни проблеми да се прилагат едни и същи измерители като в зависимост от това какво се измерва, в единия случай се говори за измерители за структурни *изменения*, във втория – за измерители на структурни *различия*, а в третия – за измерители на структурна *неравномерност*.

Използването на измерителите за *различие* при анализа на *неравномерността* на структурите е оправдано, тъй като и в двата случая се сравняват статични структури. В същото време, между анализа в статика и анализа в динамика има принципна разлика, което прави недостатъчно използването в динамика на измерителите за различие. Разликата е в това, че при анализа в статика двете структури са равнопоставени, докато при анализа в динамика винаги едната структура е начална, а другата е крайна. Това означава, че началната структура е съществувала в един определен момент от времето, след което се е изменила и е достигнала крайната в друг следващ момент от времето, а не обратното. В такъв смисъл, при *изменението* всяка от двете

структури има точно определено място, определено от хронологията на промяната, докато при *различието* няма значение коя структура е първа и коя втора. Това води до необходимостта при изследване на структурните *изменения* да се измерва *не само големината*, но и *посоката* на *изменението*, което от своя страна оправдава използването на векторната алгебра за целите на анализа.

1.2. Предлагано решение за измерване на структурните изменения

Всяка структура с относителни дялове (p_1, p_2, \dots, p_m) може да се разглежда като точка в m -мерна правоъгълна координатна система с координати (p_1, p_2, \dots, p_m) , където m е броят на значенията на структурообразувания признак. Тъй като относителните дялове на структурата отговарят на условията, зададени със системата:

$$(1) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^m p_i = 1 \\ p_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \end{cases},$$

то всяка точка се намира във вътрешността на правилен многоъгълник с върхове $A_i(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) и страни с дължина $\sqrt{2}$.

Нека началната структура има относителни дялове $(p'_1, p'_2, \dots, p'_m)$, а крайната – $(p''_1, p''_2, \dots, p''_m)$.

Основният въпрос е „Как?“ се е изменила структурата. Този въпрос се разделя на други два въпроса „С колко?“ и „Накъде?“. За да можем да отговорим на тях, обаче, най-напред трябва да сме наясно за изходната позиция, от която започва *изменението*, т.е. трябва да отговорим и на въпроса „Откъде?“. А за да отговорим на всички тези въпроси, трябва да разполагаме с някакви постоянни ориентири.

Тук ще предложа един подход, при който за ориентири се използват върховете A_i на многоъгълника. В този случай можем да изчислим разстоянията от точката $B'(p'_1, p'_2, \dots, p'_m)$, представяща началната структура, до всеки от върховете A_k :

$$(2) \quad \begin{aligned} B'A_k &= \sqrt{(p'_1 - 0)^2 + (p'_2 - 0)^2 + \dots + (p'_k - 1)^2 + \dots + (p'_m - 0)^2} = \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^m (p'_i)^2 - 2p'_k + 1} \end{aligned}$$

Изчислявайки разстоянията $B'A_k$ разбираме къде е разположена точката B' спрямо избраните ориентири¹.

Сега вече можем да търсим отговор на въпросите „С колко?“ и „Накъде?“ се е изменила структурата.

Отговорът на въпроса „С колко?“ всъщност е отговор на въпроса за разстоянието между две точки в правоъгълната координатна система (евклидово разстояние):

$$(3) \quad B'B'' = \sqrt{\sum_{i=1}^m (p_i'' - p_i')^2}$$

Дали това разстояние е голямо или малко? Отговор на този въпрос се дава като полученото разстояние се сравни с максимално възможното разстояние. В литературата (Христов, 1993, с. 9; Христов, 1999, с. 8; Христов, 2000, с. 25; Христов, 2001, с. 59-60; Янкова, 2001а, с. 28) е посочено, че максимално възможното разстояние е $\sqrt{2}$ и ако отнесем полученото разстояние $B'B''$ към теоретичното максимално възможно разстояние ($\sqrt{2}$) ще получим нормираното евклидово разстояние:

$$(4) \quad \frac{B'B''}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (p_i'' - p_i')^2}{2}},$$

Използването на нормираното евклидово разстояние за измерване на структурното изменение е пример за механично пренасяне на измерители от анализа в статика към анализа в динамика. Както вече беше казано по-горе, при анализа в статика двете структури са **равнопоставени**. Следователно максималното възможно разстояние между две произволни точки действително е разстоянието между два върха на многоъгълника. При анализа в динамика обаче, двете структури **не са равнопоставени**. Следователно максималното възможно разстояние не е между две произволни точки, а е между една произволна точка и началната точка B' , т.е. максимално възможното разстояние е разстоянието от началната точка до най-отдалечения връх –

¹ По същия начин можем да определим къде се намира точката $B''(p_1'', p_2'', \dots, p_m'')$, представяща

крайната структура, спрямо върховете на многоъгълника: $B''A_k = \sqrt{\sum_{i=1}^m (p_i'')^2 - 2p_k'' + 1}$

$\max(B'A_1, B'A_2, \dots, B'A_m)$. Ако отнесем полученото разстояние $B'B''$ към реалното максимално възможно разстояние ($\max(B'A_1, B'A_2, \dots, B'A_m)$) ще получим:

$$(5) \quad \frac{B'B''}{\max(B'A_1, B'A_2, \dots, B'A_m)} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^m (p_i'' - p_i')^2}}{\max(B'A_1, B'A_2, \dots, B'A_m)}$$

Този измерител показва *големината* на промяната в относително изражение спрямо максимално възможната промяна.

Сега да се опитаме да дадем отговор на въпроса „*Накъде?*”.

При изследване на *посоката* на промяната, равнината, определена от върховете A_i , вече не може да бъде полезна. Това е така, защото вектора на промяната $\overrightarrow{B'B''}$ всъщност е разлика от двата вектора $\overrightarrow{OB''}$ и $\overrightarrow{OB'}$:

$$(6) \quad \overrightarrow{B'B''} = \overrightarrow{OB''} - \overrightarrow{OB'} = (p_1'' - p_1', p_2'' - p_2', \dots, p_m'' - p_m'),$$

която е трети вектор \overrightarrow{OC} с координати $(p_1'' - p_1', p_2'' - p_2', \dots, p_m'' - p_m')$.

Очевидно вектора \overrightarrow{OC} не лежи в равнината, определена от върховете A_i . Следователно, въпросът е в коя равнина лежи този вектор.

Тъй като точките A_i са върхове на правилен многоъгълник, то този многоъгълник може да се впише в окръжност. Центърът (D) на тази окръжност е равноотдалечен от всичките му върхове, следователно неговите координати удовлетворяват условието:

$$(7) \quad \sqrt{\sum_{i=1}^m p_i^2 - 2p_k + 1} = \text{const}, k = 1, 2, \dots, m$$

откъдето:

$$(8) \quad p_i = \frac{1}{m}, i = 1, 2, \dots, m$$

Следователно описаната около многоъгълника окръжност има център

$$D\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\right).$$

Можем да направим трансляция по вектор $\overrightarrow{DO} = \left(-\frac{1}{m}, -\frac{1}{m}, \dots, -\frac{1}{m}\right)$, която

изобразява точката $D\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\right)$ в центъра на координатната система

$O(0,0,\dots,0)^2$. При тази транслагция, върхът $A_i(0,0,\dots,1,\dots,0)$ на изходния многоъгълник се изобразява във върха $E_i\left(-\frac{1}{m}, -\frac{1}{m}, \dots, 1 - \frac{1}{m}, \dots, -\frac{1}{m}\right)$ на еднакъв на него многоъгълник.

Предимствата на равнината, определена от върховете E_i са, че:

първо, съдържа координатното начало, като то същевременно е и център на описаната около многоъгълника $E_1E_2\dots E_m$ окръжност,

второ, успоредна е на равнината, определена от върховете A_i (Кирков, Бонев, Петков, 1974, с. 85-86), и

трето, всеки вектор от равнината, определена от върховете A_i , се изобразява в равен на него вектор в равнината, определена от върховете E_i , откъдето следва, че

четвърто, всички вектори, необходими за изследване на промяната лежат в равнината, определена от върховете E_i .

При транслагцията точката $B'(p'_1, p'_2, \dots, p'_m)$ се изобразява в точката $F'\left(p'_1 - \frac{1}{m}, p'_2 - \frac{1}{m}, \dots, p'_m - \frac{1}{m}\right)$, точката $B''(p''_1, p''_2, \dots, p''_m)$ се изобразява в точката $F''\left(p''_1 - \frac{1}{m}, p''_2 - \frac{1}{m}, \dots, p''_m - \frac{1}{m}\right)$, откъдето векторът $\overrightarrow{B'B''}$, който показва *посоката* на промяната, ще се изобрази в равния на него вектор $\overrightarrow{F'F''}$, лежащ в равнината, определена от върховете E_i .

От $\overrightarrow{F'F''} = \overrightarrow{B'B''} = (p''_1 - p'_1, p''_2 - p'_2, \dots, p''_m - p'_m)$ следва, че векторите $\overrightarrow{B'B''}$ и $\overrightarrow{F'F''}$ са равни на вектора $\overrightarrow{OC}(p''_1 - p'_1, p''_2 - p'_2, \dots, p''_m - p'_m)$. Но векторът $\overrightarrow{F'F''}$ лежи в равнината, определена от върховете E_i , следователно и векторът \overrightarrow{OC} ще лежи в тази равнина. В такъв случай *посоката* на промяната спрямо съответния връх на многоъгълника може да се изследва чрез ъгъла COE_k между вектора на промяната и вектора на радиуса от центъра към върха E_k . Този ъгъл се определя

² Може да се докаже, че векторът \overrightarrow{DO} е перпендикулярен на равнината, определена от върховете A_i .

чрез косинуса си, който се намира по формулата (Киркоров, Бонев, Петков, 1974, с. 75):

$$\begin{aligned}
 \cos COE_k &= \\
 (9) \quad &= \frac{(p_1'' - p_1')\left(-\frac{1}{m}\right) + (p_2'' - p_2')\left(-\frac{1}{m}\right) + \dots + (p_k'' - p_k')\left(1 - \frac{1}{m}\right) + \dots + (p_m'' - p_m')\left(-\frac{1}{m}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^m (p_i'' - p_i')^2} \sqrt{\left(-\frac{1}{m}\right)^2 + \left(-\frac{1}{m}\right)^2 + \dots + \left(1 - \frac{1}{m}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{m}\right)^2}} = \\
 &= \frac{(p_k'' - p_k')\sqrt{m}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m (p_i'' - p_i')^2} \sqrt{m-1}}
 \end{aligned}$$

От друга страна, описаната около правилния многоъгълник с върхове E_i окръжност има център $O(0,0,\dots,0)$, радиус:

$$(10) \quad OE_k = \sqrt{\left(-\frac{1}{m} - 0\right)^2 + \left(-\frac{1}{m} - 0\right)^2 + \dots + \left(1 - \frac{1}{m} - 0\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{m} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{m-1}{m}}$$

и централен ъгъл E_kOE_j с косинус (Киркоров, Бонев, Петков, 1974, с. 75):

$$\begin{aligned}
 \cos E_kOE_j &= \\
 (11) \quad &= \frac{\left(-\frac{1}{m}\right)\left(-\frac{1}{m}\right) + \left(-\frac{1}{m}\right)\left(-\frac{1}{m}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{1}{m}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(-\frac{1}{m}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{m}\right)\left(-\frac{1}{m}\right)}{\sqrt{\frac{m-1}{m}} \sqrt{\frac{m-1}{m}}} = \\
 &= -\frac{1}{m-1}
 \end{aligned}$$

Това означава, че структурата се променя в посока на този връх E_k , за който ъгъл COE_k е по-малък от половината от централния ъгъл, т.е.:

$$(12) \quad \cos COE_k > \cos \frac{E_kOE_j}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos E_kOE_j}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{m-1}}{2}} = \sqrt{\frac{m-2}{2(m-1)}}$$

Щом като промяната в равнината, определена от върховете E_i , е по посока на връх E_k , то промяната в равнината, определена от върховете A_i , ще бъде по посока на връх A_k .

Освен промяна по посока на даден връх A_k можем да изследваме промяната по посока на равнина, несъдържаща върха A_l , в подпространство с размерност $m-1$. Тази равнина се дефинира чрез системата (Киркоров, Бонев, Петков, 1974, с. 83 и с. 86):

$$(13) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^m p_i = 1 \\ p_l = 0 \end{cases},$$

която е еквивалентна на:

$$(14) \quad \sum_{i=1}^m p_i - p_l = 1$$

Нека пресечната точка на правата $B'B''$ с тази равнина е G . Това означава, че (Киркоров, Бонев, Петков, 1974, с. 92):

$$(15) \quad \overrightarrow{B'G} = t \overrightarrow{B'B''} = (t(p_1'' - p_1'), t(p_2'' - p_2'), \dots, t(p_l'' - p_l'))$$

и освен това, точката G е проекция на точката B' при трансляция по вектора $\overrightarrow{B'G}$. Следователно точката G има координати (Киркоров, Бонев, Петков, 1974, с. 89):

$$(16) \quad p_i = p_i' + t(p_i'' - p_i')$$

Но точката G принадлежи на равнината, дефинирана с (14), следователно нейните координати p_i удовлетворяват уравнение (14), откъдето се получава:

$$(17) \quad t = \frac{p_l'}{-(p_l'' - p_l')}$$

След заместването на този резултат в (16) се получава:

$$(18) \quad p_i = \frac{p_i' p_l'' - p_i'' p_l'}{p_l'' - p_l'}$$

Сега вече можем да идентифицираме върха A_l .

Ясно е, че щом промяната е по *посока* на равнината, дефинирана с (14), трябва векторите $\overrightarrow{B'G}$ и $\overrightarrow{B'B''}$ да са еднопосочни, т.е.:

$$(19) \quad t = \frac{p_l'}{-(p_l'' - p_l')} > 0$$

От друга страна координатите на точка G , дефинирани с (18), трябва да удовлетворяват условията (1). Тъй като обаче, те удовлетворяват условията (13), то те удовлетворяват и първото условие в (1). Следователно, остава само да удовлетворят и второто условие в (1), т.е.:

$$(20) \quad p_i = \frac{p_i' p_l'' - p_i'' p_l'}{p_l'' - p_l'} \geq 0$$

Условията (19) и (20) се разглеждат в система, чието решение е:

$$(21) \quad \frac{p_i''}{p_i'} = \min\left(\frac{p_i''}{p_i'}\right) (i=1,2,\dots,m)$$

Практическата полза от този резултат е, че след като идентифицираме върха A_i , от (17) определяме t , а от (15) получаваме, че максимално възможната промяна в дадената посока е:

$$(22) \quad B'G = t \cdot B'B'' = \frac{p_i'}{-(p_i'' - p_i')} \sqrt{\sum_{i=1}^m (p_i'' - p_i')^2}$$

Като отнесем разстоянието $B'B''$ към максимално възможната промяна в дадената посока ($B'G$), получаваме:

$$(23) \quad \frac{B'B''}{B'G} = \frac{1}{t} = \frac{-(p_i'' - p_i')}{p_i'} = 1 - \frac{p_i''}{p_i'}$$

Този измерител, също както и измерителя, дефиниран с (5), показва *големината* на промяната в относително изражение, спрямо максимално възможната промяна в дадената посока.

2. Анализ на измененията на етническата структура на населението

По данни от националните преброявания на населението (<http://censusresults.nsi.bg/Census/Reports/1/2/R7.aspx>) може да се получи етническата структура на населението, като тази структура е преизчислена спрямо цялото преброено население, а не само спрямо отговорилите на въпроса за етническото самоопределение, както е дадена от НСИ:

Таблица 1
Население по етническа група

Етническа група	Години на преброяванията ¹												
	1900	1905	1910	1920	1926	1934	1946	1956	1965	1975	1992	2001	2011
	<i>Структура²</i>												
Общо	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Българска	0,771	0,794	0,811	0,833	0,832	0,856	0,840	0,855	0,879	0,909	0,857	0,839	0,769
Турска	0,142	0,121	0,107	0,107	0,105	0,097	0,096	0,086	0,095	0,084	0,094	0,094	0,080
Ромска	0,024	0,025	0,028	0,020	0,025	0,025	0,024	0,026	0,018	0,002	0,037	0,047	0,044
Друга ²	0,063	0,061	0,053	0,040	0,038	0,022	0,040	0,033	0,008	0,006	0,011	0,009	0,007
Не се самоопределя ³	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,008	0,007
Неотговорили	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,003	0,093

¹ При преброяването през 1985 година не е наблюдаван признакът „етническа група“. Поради доброволния характер на въпроса за етническото самоопределение през 2001 и 2011 година разпределенията се отнасят за отговорилите на този въпрос лица.

² До 1975 година включително в групата „Друга“ са включени и непоказалите етническата си група.

³ За 1992 и 2001 година в групата „Не се самоопределя“ са включени и непоказалите етническата си група.

Нека започнем с етническата структура на населението на България по данни от преброяванията на населението през 1900 и 1905 година:

Таблица 2

Етническа структура на населението на България по данни от преброяванията на населението през 1900 и 1905 година

Етническа група	Относителни дялове през:		$p'' - p'$	$\frac{p''}{p'}$
	1900 година (p')	1905 година (p'')		
Българска	0,771	0,794	0,023	1,029
Турска	0,142	0,121	-0,021	0,852
Ромска	0,024	0,025	0,001	1,026
Друга	0,063	0,061	-0,002	0,965
Не се самоопределя	0,000	0,000	0,000	-
Неотговорили	0,000	0,000	0,000	-
Общо	1,000	1,000	0,000	

Нека върхът $A_1(1,0,0,0,0,0)$ представя структурата, в която всички лица са от българска етническа група, върхът $A_2(0,1,0,0,0,0)$ представя структурата, в която всички лица са от турска етническа група, върхът $A_3(0,0,1,0,0,0)$ представя структурата, в която всички лица са от ромска етническа група и т.н.

Разстоянията от началната структура до върховете на многоъгълника са съответно (Формула 2):

$$B'A_1 = \sqrt{0,771^2 + 0,142^2 + 0,024^2 + 0,063^2 + 0,000^2 + 0,000^2 - 2 \cdot 0,771 + 1} = 0,277$$

$$B'A_2 = \sqrt{0,771^2 + 0,142^2 + 0,024^2 + 0,063^2 + 0,000^2 + 0,000^2 - 2 \cdot 0,142 + 1} = 1,156$$

$$B'A_3 = \sqrt{0,771^2 + 0,142^2 + 0,024^2 + 0,063^2 + 0,000^2 + 0,000^2 - 2 \cdot 0,024 + 1} = 1,254$$

$$B'A_4 = \sqrt{0,771^2 + 0,142^2 + 0,024^2 + 0,063^2 + 0,000^2 + 0,000^2 - 2 \cdot 0,063 + 1} = 1,222$$

$$B'A_5 = \sqrt{0,771^2 + 0,142^2 + 0,024^2 + 0,063^2 + 0,000^2 + 0,000^2 - 2 \cdot 0,000 + 1} = 1,273$$

$$B'A_6 = \sqrt{0,771^2 + 0,142^2 + 0,024^2 + 0,063^2 + 0,000^2 + 0,000^2 - 2 \cdot 0,000 + 1} = 1,273$$

Тези резултати показват, че началната структура на населението е най-отдалечена от върховете A_5 (не се самоопределят) и A_6 (неотговорили) и най-близка до върха A_1 (българска етническа група).

Големината на настъпилата промяна е (Формула 3):

$$V'B'' = \sqrt{0,023^2 + (-0,021)^2 + 0,001^2 + (-0,002)^2 + 0,000^2 + 0,000^2} = 0,031$$

Това разстояние, отнесено към реалното максимално възможно разстояние (Формула 5) и към максимално възможното разстояние в дадената посока (Формула 23), дава съответно:

$$\frac{0,031}{\max(0,277;1,156;1,254;1,222;1,273;1,273)} = \frac{0,031}{1,273} = 0,024$$

$$1 - \min(1,029;0,852;1,026;0,965) = 1 - 0,852 = 0,148$$

Тези резултати показват, че настъпилата промяна е 2,4% от реалната максимално възможна промяна и 14,8% от максимално възможната промяна в дадената посока.

А самата посока определяме чрез косинусите на ъглите между вектора на промяната и вектора към съответния връх (Формула 9):

$$\cos COE_1 = \frac{0,023\sqrt{6}}{0,031\sqrt{5}} = 0,800; COE_1 = 36^\circ 52' 53''$$

$$\cos COE_2 = \frac{-0,021\sqrt{6}}{0,031\sqrt{5}} = -0,744; COE_2 = 138^\circ 4' 54''$$

$$\cos COE_3 = \frac{0,001\sqrt{6}}{0,031\sqrt{5}} = 0,022; COE_3 = 88^\circ 44' 43''$$

$$\cos COE_4 = \frac{-0,002\sqrt{6}}{0,031\sqrt{5}} = -0,078; COE_4 = 94^\circ 27' 19''$$

$$\cos COE_5 = \frac{0,000\sqrt{6}}{0,031\sqrt{5}} = 0,000; COE_5 = 90^\circ$$

$$\cos COE_6 = \frac{0,000\sqrt{6}}{0,031\sqrt{5}} = 0,000; COE_6 = 90^\circ$$

Тъй като косинусът на половината от централния ъгъл е (Формула 12):

$$\cos \frac{E_k OE_j}{2} = \sqrt{\frac{4}{2.5}} = \sqrt{\frac{2}{5}} = 0,632,$$

то промяната е по посока на върха E_1 (респ. A_1), т.е. по-посока на българската етническа група. Видно е също така, че етническата структура на населението се отдалечава от върха A_2 , т.е. от турската етническа група.

Този анализ може да продължи и за другите преброявания на населението. Но в крайна сметка анализът на промяната на етническата структура за всички преброявания се улеснява, ако се обобщи графично.

Нека най-напред започнем с това, че ако изберем един от върховете A_k , можем да изобразим графично началната структура $B'(p'_1, p'_2, \dots, p'_m)$, тъй като можем да изчислим разстоянието ѝ до центъра D на описаната около правилния многоъгълник окръжност, както и косинуса на ъгъла $B'DA_k$:

$$(24) \quad B'D = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{m} - p'_i \right)^2}$$

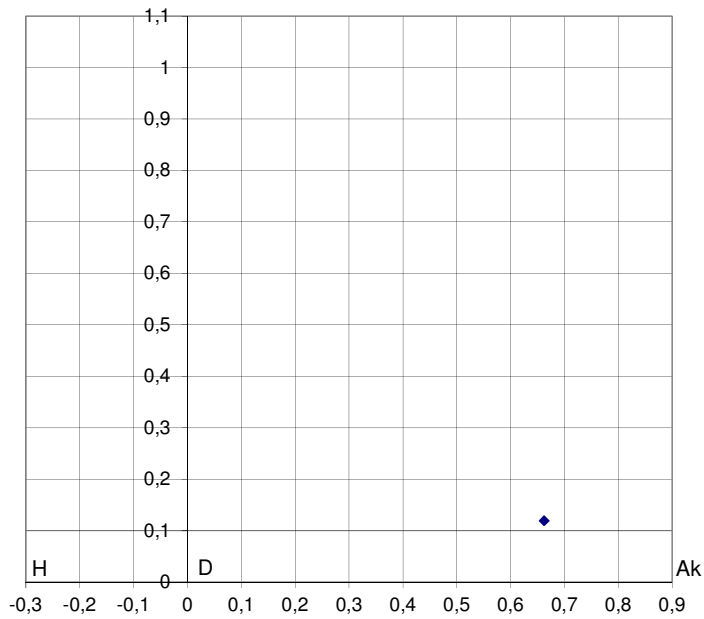
$$(25) \quad \cos B'DA_k = \cos F'OE_k = \frac{\left(p'_k - \frac{1}{m} \right) \sqrt{m}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \left(p'_i - \frac{1}{m} \right)^2} \sqrt{m-1}}$$

Нека разгледаме върха на българската етническа група. Тогава:

$$B'D = 0,673$$

$$\cos B'DA_1 = \frac{\left(0,771 - \frac{1}{6} \right) \cdot \sqrt{6}}{0,673 \cdot \sqrt{5}} = 0,984; B'DA_1 = 10^\circ 11' 47''$$

Изобразяваме точка B' в условна равнина. Тази равнина е условна, защото само едната от двете ѝ оси е реална – това е абсцисата, която всъщност е векторът $\overrightarrow{DA_1}$. Ординатната ос е условна, защото на практика използваме полярни координати.

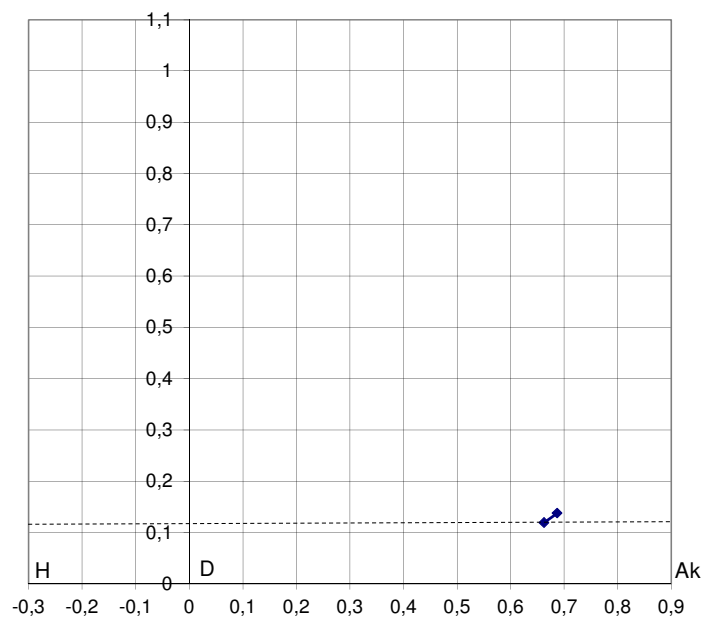


Фигура 1. Етническа структура на населението на България през 1900 година спрямо върха на българската етническа група

След това пренасяме центъра на координатната система в точка B' и изобразяваме точка B'' , за която вече сме изчислили:

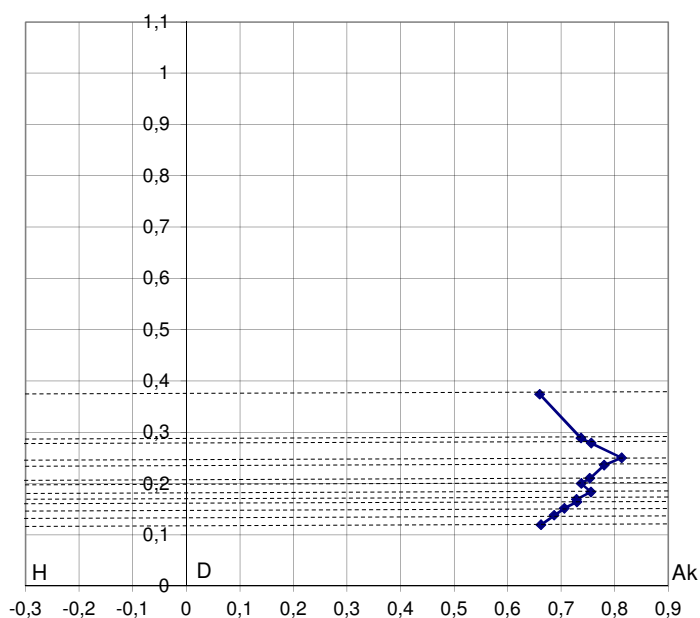
$$B'B'' = 0,031$$

$$B''B'A_1 = COE_1 = 36^\circ 52' 53''$$



Фигура 2. Етническа структура на населението на България през 1900 и 1905 година спрямо върха на българската етническа група

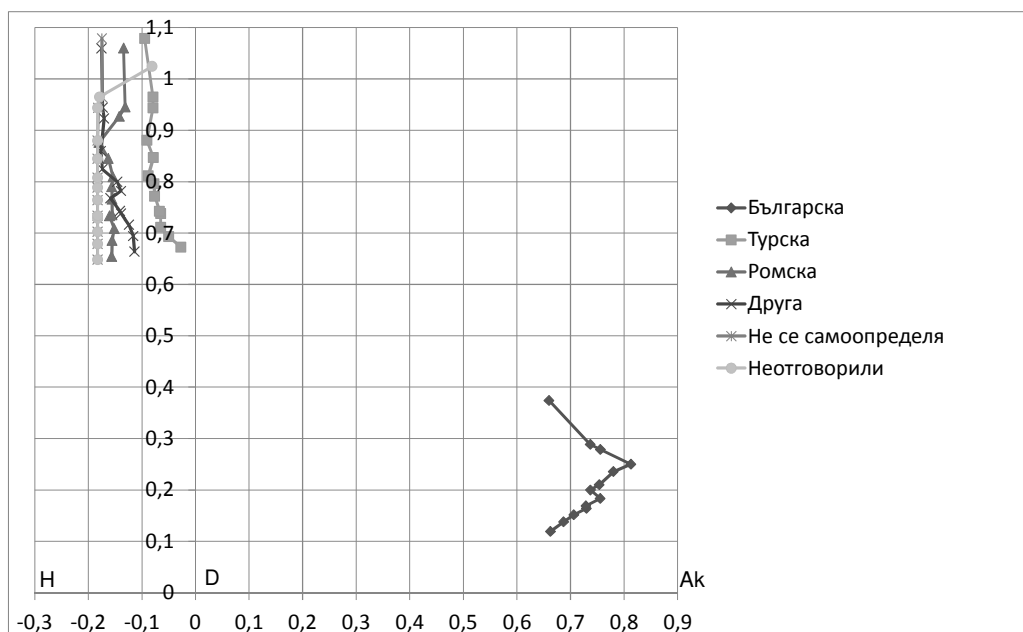
По този начин продължаваме да нанасяме и следващите точки, които представят етническата структура на българското население през годините на другите национални преброявания. В резултат се получава следната графика:



Фигура 3. Етническа структура на населението на България от 1900 до 2011 година спрямо върха на българската етническа група

Тази фигура се чете само в посока ляво-дясно. Движението на дясно означава приближаване към съответния връх, докато движението наляво означава отдалечаване от него. Движение перпендикулярно нагоре показва липса на промяна спрямо съответния връх. В конкретния случай, до 1975 година етническата структура на българското население се приближава към върха на българската етническа група, докато след това започва да се отдалечава и през 2011 година е приблизително на същото разстояние от този връх, както и през 1900 година.

Такава фигура може да се направи за всеки връх поотделно, но за целите на анализа е по-удобно, ако всички фигури се съберат в една:



Фигура 4. Етническа структура на населението на България от 1900 до 2011 година спрямо всички върхове

От Фигура 4 стават ясни няколко неща:

- етническата структура на населението на България е най-близо до върха на българската етническа група;
- до 1975 година етническата структура се приближава към върха на българската етническа група, след което започва да се отдалечава;
- до 1910 година етническата структура се отдалечава от върха на турската етническа група, след което до 1956 година отдалечаването е сравнително по-бавно, а след това по отношение на този връх настъпва относителна стабилност;
- до 1956 година етническата структура е относително стабилна по отношение на върха на ромската етническа група, след което до 1975 година се отдалечава от този връх, а след това започва да се приближава към него. При последното преброяване от 2011 година спрямо предходното през 2001 не се наблюдава промяна на етническата структура по отношение на този връх;
- до 1965 година етническата структура се отдалечава от върха на групата „други“, а след това по отношение на този връх настъпва относителна стабилност;
- по отношение на върха на несамоопределилите се се наблюдава относителна стабилност през целия наблюдаван период;

- по отношение на върха на неотговорилите се наблюдава относителна стабилност до 2001 година, но през 2011 година етническата структура се приближава към този връх.

Последният извод е свързан с една особеност на последното национално преброяване на населението през 2011 година – изключително високият процент на неотговорилите на въпроса за етническата принадлежност. Този процент е безпрецедентно висок на фона на предходните преброявания, когато, самостоятелно или като част от други групи, групата на неотговорилите никога не е била толкова голяма.

Фигура 4 позволява да се формулират две хипотези, обясняващи този факт. Непосредствено от графиката като че ли следва, че делът на неотговорилите се увеличава за сметка на намаляване на дела на лицата от българската етническа група. Но също така може и да се допусне, че делът на неотговорилите се увеличава за сметка на „рязкото“ пречупване на промяната от посока на ромската етническа група в посока, неутрална спрямо този връх.

Коя от двете хипотези е вярна и дали обяснението не е комбинация от двете? Получените резултати в точка 2 ни дават възможност да проектираме промяната от периода 1992-2001 година и за следващия период и по този начин да направим прогноза каква би била етническата структура през 2011 година, ако се запазят тенденциите от предходния период. Тогава сравнението с реално наблюдаваната етническа структура би ни дало повече информация за етническата структура на неотговорилите.

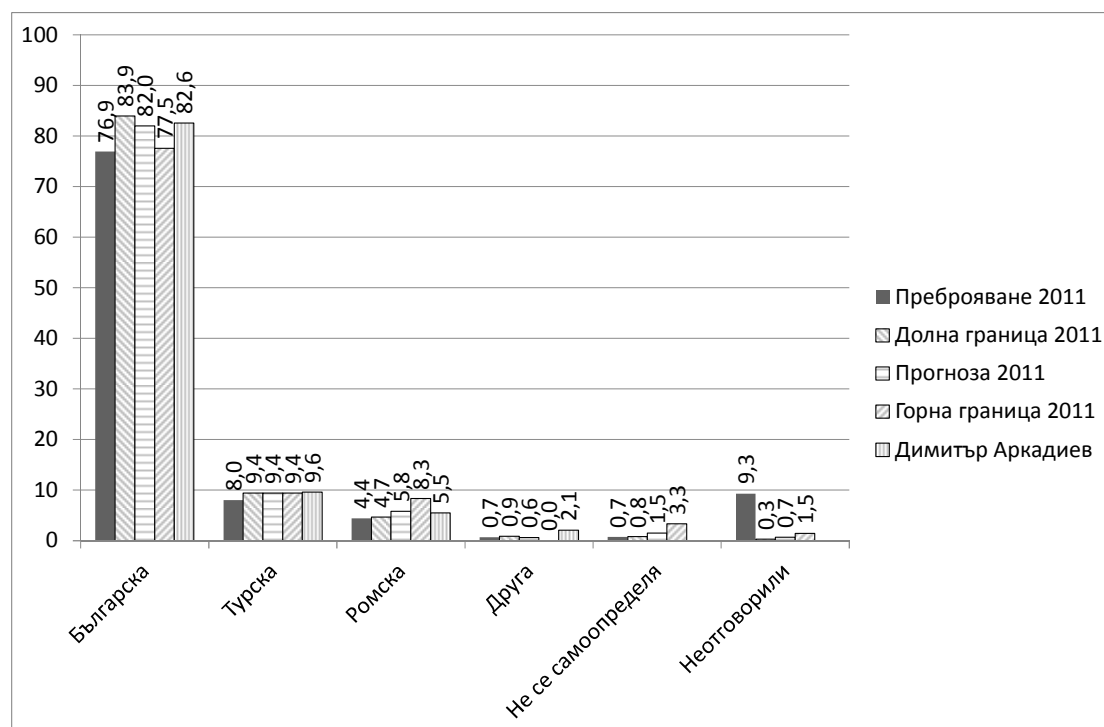
От Формула 21 се получава, че през 2001 година етническата структура се отдалечава от върха на групата „други“, а от Формула 20 се получават координатите на точката G . Тоест, ако се следва векторът на промяната между 1992 и 2001 година, очакваме, че етническата структура ще се намира между точките B' , която представлява структурата през 2001 година, и G , която представлява последната възможна структура по посока на вектора $\overline{B'B}$. В този смисъл, структурата през 2001 година ще бъде долна граница на прогнозата, а структурата, представявана от точка G , ще бъде горна граница на прогнозата. За да определим самата прогнозна стойност, използваме, че векторът на промяната ще следва същата посока като през предходния период, а дължината му да бъде равна на дължината му от предходния период. Тук можем да

направим корекция, свързана с различната продължителност на двата периода, понеже периодът 1992-2001 година е с продължителност 9 години, докато периодът 2001-2011 година е с продължителност 10 години. Тогава дължината на вектора на промяната през периода 2001-2011 би бил десет девети от дължината на вектора на промяната през предходния период или $\frac{10}{9} \cdot 0,021 = 0,024$. След което, ако изразим Формула 9 спрямо координатите на

прогнозната структура B''' , се получава:

$$(26) \quad p_k''' = p_k'' + \frac{\cos COE_k \sqrt{\sum_{i=1}^m (p_i'' - p_i''')^2 \sqrt{m-1}}}{\sqrt{m}} = p_k'' + \frac{\cos COE_k \cdot 0,024 \sqrt{5}}{\sqrt{6}}$$

По този начин се получават координатите на прогнозната структура. На фигура 5 са представени реалната етническа структура през 2011 година, долната граница на прогнозата за 2011 година, самата прогноза за 2011 година, горната граница на прогнозата за 2011 година, както и етническата структура, според Димитър Аркадиев, чийто е единственият друг опит, който успя да открие, за установяване на етническата структура на неотговорилите (Аркадиев, 2012, с. 129).



Фигура 5. Етническа структура на населението на България през 2011 година

Според резултатите във Фигура 5, една голяма част от неотговорилите могат да се разпределят между етническите групи, така че техният дял да намалее от 9,3% на 0,7%. Това става за сметка на увеличаването на дела на българите от 76,9% на 82,0%, на турците – от 8,0% на 9,4%, на ромите – от 4,4% на 5,8% и на несамоопределилите се – от 0,7% на 1,5%. Тези прогнозни резултати са доста близки до резултатите, получени от Димитър Аркадиев, който използва за своята прогноза режимите на раждаемост и смъртност на различните етнически групи. (Аркадиев, 2012, с. 123-131), и в крайна сметка показват, че най-голям дял от неотговорилите са от българската етническа група.

3. Заключение

С помощта на аналитичната геометрия и векторната математика беше даден отговор на въпроса *в каква посока* се изменя една структура. Получените резултати бяха използвани за анализиране на измененията на етническата структура на българското население по данни от преброяванията от 1900 година до наши дни.

Беше установено, че етническата структура на населението на България е най-близо до върха на българската етническа група, като до 1975 година етническата структура се приближава към този връх, след което започва да се отдалечава. В същото време след 1975 година етническата структура се приближава към върха на ромската етническа група. По отношение на другите етнически групи има относителна стабилност.

Накрая е направен опит големият процент неотговорили на въпроса за етническата принадлежност през 2011 година да бъде преразпределен между етническите групи на базата на екстраполация на структурните изменения между предходните две преброявания на населението през 1992 и 2001 година. Полученият резултат показва, че най-голяма част от неотговорилите са от българската етническа група.

Литература:

- Аркадиев, Д.** (2012) Някои проблеми около данните за етническия състав на населението в България от Преброяване 2011 година. В: *Статистика, информационни технологии и комуникации*. София: Издателски комплекс – УНСС.
- Гатев, К., Д. Косева, А. Спасов.** (1991) *Обща теория на статистиката*. София: Наука и изкуство.
- Киркоров, И., К. Бонев, Е. Петков.** (1974) *Висша математика*. София: Наука и изкуство.
- Христов, Е.** (1993) Измерители за структурни промени и на техните ефекти в демографския анализ. Сп. *Население*, бр. 3
- Христов, Е.** (1999) Измерители за обобщени структурни различия (промени). Сп. *Статистика*, бр. 2
- Христов, Е.** (2000) Влияния на промените на повъзрастовата смъртност и възрастовата структура на населението върху изменението на брутната смъртност (методологични решения и емпиричен анализ). Сп. *Население, Юбилеен брой „10 години Население“*
- Христов, Е.** (2001) Обобщаващи измерители за основни видове структурни различия в икономическите и социалните изследвания. Сп. *Статистика*, бр. 6
- Янкова, Н.** (2001а) Изследване развитието на възрастовата структура на населението в България за периода 1920-1999 г. Сп. *Статистика*, бр. 5
- Янкова, Н.** (2001б) Сравнителен анализ на обобщаващи измерители за структурни изменения (различия). Сп. *Статистика*, бр. 2